宇宙のウィグナー関数

京大教養　小玉英雄

宇宙全体の量子論的な振舞いを議論するには、重力の量子論が必要となる。しかし、残念ながら現在の所満足のゆく重力の量子論はできあがっていない。そこで、ここでは Wheeler-DeWitt 流のアプローチの枠内で議論を進める。当然ながら、様々な問題点や困難が顔を出す。本稿の目的は、それらの困難をうまく処理する方法があるか、またそれによって何か具体的な結論を導くことができるかを単純な宇宙モデルを用いて分析することにある。

§1 重力の量子論

Wheeler-DeWitt 理論の出発点は、Dirac の方法に従って Einstein 理論を正準形式に書き換えることである。時空計量を

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q_{ij}(N^i dt + dx^i)(N^j dt + dx^j) \tag{1.1}$$

と（3＋1）形式で表わすとき、Einstein 理論の一般共変性のためにラグランジアン L は $\dot{N}^\mu$ $(N^0 = N)$ に依存しなくなる。このため N^μ は正準共役量を持たず、同時に拘束条件

$$\frac{\delta L}{\delta N^\mu} = 0 \tag{1.2}$$

が現われる。Dirac によると、この様な正準的に退化した系は、任意関数を含むハミルトニアンを用いて、拘束条件を持つ正準理論に書き換えることができる。Einstein 理論の場合、結果は次のようになる：

$$\dot{X} = \{X, H\}; \quad X = q_{ij}, p^{ij}, \tag{1.3}$$

$$H = \int d^3x\, N^\mu \mathcal{H}_\mu, \tag{1.4}$$

$$\mathcal{H}_\mu \approx 0. \tag{1.5}$$

ここで、p^{ij} は q_{ij} の正準共役量、$\mathcal{H}_\mu$ は q_{ij} と p^{ij} のみで表わされる量である。それらの具体的な形は以下では重要でないので省略する。また、lapse 関数 N 及び shift vector N^i は非力学的な任意関数となる。

ここで重要なことは、拘束条件 Eq.(1.5) が first class の拘束条件になっていることである：

$$\{\mathcal{H}_\mu, \mathcal{H}_\nu\} \approx 0. \tag{1.6}$$

このおかげで、通常の対応原理、$\{q,p\} \to i[p,q]$により量子論への形式的移行が可能となる。特に、古典的拘束条件 Eqs.(1.5) は

$$\mathcal{H}^\mu \mid \mathrm{Phys} >= 0 \tag{1.7}$$

と物理的に許される状態に対する拘束条件となる。拘束条件が first class であることは、この量子論的条件の整合性を保証する。

この様にして得られた量子論は大枠ではよさそうに見えるが、実はやっかいな問題を内包している。それは拘束条件のためにハミルトニアンを物理状態に作用させるとゼロとなり、物理状態の空間では時間発展が見かけ上なくなる点である：

$$\begin{aligned} < \mathrm{Phys} \mid X(t) \mid \mathrm{Phys} > &=< \mathrm{Phys} \mid e^{iHt} X(0) e^{-iHt} \mid \mathrm{Phys} > \\ &=< \mathrm{Phys} \mid X(0) \mid \mathrm{Phys} > . \end{aligned} \tag{1.8}$$

これは、一見問題が簡単になっただけのように見えるかも知れないが、実はそうではない。本来、量子論的な正準方程式は期待値を取ると、$\hbar$ の最低次で古典的な正準方程式を与える。したがって、時間発展が自明になることは、正準量の期待値が意味を失っている（一般的には発散しいている）ことを意味している。

この様なことが起きる理由は次のように理解できる。拘束条件で現われる作用素 $\mathcal{H}_\mu$は一般座標変換の生成作用素となっている。したがって、拘束条件は、物理的な状態が一般座標変換に対して不変であることを表わしている。この様な状態で、例えば q_{ij}の期待値を取ると、結果は任意の一般座標変換で不変な値とならねばならない。ところが、古典的な q_{ij}は時間の変換まで許すと適当な一般座標変換によって任意の値を取るようにできる。したがって、q_{ij}の期待値は無限大（かゼロ）とならざるを得ない。

このように、Dirac 形の正準理論を形式的に量子化して得られる理論は、意味のある状態空間の構成ができない理論となっている。この困難は、出発点でゲージを固定するタイプの理論でも、異なったゲージ条件のもとで得られる量子論が同等となる理論（ＢＲＳ不変な理論等）では、同様の拘束条件が現われるので避けられないと思われる。

この困難を避ける一つの方法は、古典論の段階でゲージを固定すると同時に拘束条件を解いてしまい、真に物理的な自由度のみで記述された理論を量子化することである。しかし、重力理論では一般的に拘束条件を解くことは困難であると同時に、conformal な自由度及び曲率項の存在のために、拘束条件を解いて得られるハミルトニアンは全ての変数に対して実であることが保証されなくなる。もう一つの可能性はいわゆる第3量子化である。この方法は曲がった時空（実際は superspace）上の自由場の量子論と同様の理論を与えるので形式的には困難は生じないが、その解釈は途方もなくむずかしくなる。

§2 拘束条件の構造

前節で述べた問題は、従来の量子力学の枠内で処理することが困難なように思われる。そこで、一旦量子力学の標準的枠組みを忘れて、形式的な量子化で得られた理論に適当な再解釈を施して意味のある理論にできないかという対症的アプローチが考えられる。この様なアプローチでは、拘束条件のみをたよりにして、次の問題に解答を与えねばならない：

（1）時間概念及び時間発展の抽出、量子力学との関連付け

（2）状態ベクトルの解釈

これらの問題を議論するには、まず、拘束条件の構造を調べる必要がある。すでに述べたように、拘束条件に現われる $\mathcal{H}_\mu$ は一般座標変換の生成作用素となっており、拘束条件はこれらの変換に対して状態ベクトルが不変であることを表わしている。ここで少し奇妙なことは、正準理論を作る段階ですでに座標の取り方の自由度を表わす lapse 関数 N と shift vector N^i が c 数の任意関数として力学系から分離されており、これらの任意関数を適当に固定しておけば一般座標変換の自由度は残っていないように見える点である。この見かけのパラドクスの原因は、N と N^i を固定しても、t の初期面の取り方の自由度と、その面内での空間座標の取り方の自由度が残っていることにある。

量子論的拘束条件の内 diffeomorphism constraint と呼ばれる $\mathcal{H}_i|\Psi>=0$ は、実は状態ベクトルがこの初期面における空間座標の変換によって互いに移り変わる状態の重ね合わせであることを表わしている。実際、空間座標を3個の物理的な場 $\phi^i(\mathbf{x})$ で表わし、状態ベクトルをこれらの固有状態で

$$|\Psi>=\int \mathcal{D}\phi \, |[\phi]> \otimes |\Psi[\phi]> \tag{2.1}$$

と分解すると、diffeomorphism constraint は

$$\left[-\frac{i}{\sqrt{q}}\partial_j\phi^k(\mathbf{x})\frac{\delta}{\delta\phi^k(\mathbf{x})}+\cdots\right]|\Psi[\phi]>=0 \tag{2.2}$$

と表わされ、$\phi^j(\mathbf{x})$ が関数系として独立であるような関数空間の領域では、一つの$[\phi]$での値が決まれば全領域での $|\Psi[\phi]>$が決ってしまう。もともと空間座標の自由度は力学的自由度ではなく、単に現象に関する情報の整理の仕方の自由度に過ぎないので、力学の議論では適当な $\{\phi^j(\mathbf{x})\}$ に対する分解された状態ベクトル $|\Psi[\phi]>$のみを考えればよい。

これに対して、hamiltonian constraint と呼ばれる拘束条件 $\mathcal{H}|\Psi>=0$ の扱いは少しやっかいである。この拘束条件は diffeomorphism constraint と同様に、空間座標の自由度に対応した無限個（∞^3）の条件となっている。この無限個の条件は、その一様成分に相当する 1 個の条件

$$H|\Psi>=0; \quad H:=\int d\mathbf{x}\,\mathcal{H}(\mathbf{x}) \tag{2.3}$$

と、残りの無限個の楕円型の方程式に分解される。これらの無限個の楕円型方程式は、diffeomorphism constraint が時間発展と矛盾しないことを保証するものであるが、その構造はよく分かっていない。そこで、以下では、Wheeler-DeWitt 方程式と呼ばれる条件 (2.3) のみの着目する。

§3 WKB近似による解釈

Wheeler-DeWitt 方程式の重要な特徴はそれが双曲型の方程式であることである。すなわち、適当な自由度 Tを対角型とする表示

$$|\Psi>=\int d\mu(T)|T>\otimes|\Psi(T)> \tag{3.1}$$

のもとで、Wheeler-DeWitt 方程式は Tの関数としての分解された状態ベクトル $|\Psi(T)>$に対する次のような方程式を与える：

$$\left[\frac{d^2}{dT^2}+U(T)+\hat{H}_Q(T)\right]|\Psi(T)>=0. \tag{3.2}$$

ここで、$U(T)$ は Tが十分大きいとき正となるポテンシャル、$\hat{H}_Q(T)$ は Tに依存する残りの自由度に対する正定値なハミルトニアンである。

今、自由度Tに関するハミルトン-ヤコビ方程式

$$-(\partial_T S)^2 + U(T) = 0 \tag{3.3}$$

の解$S(T)$を用いて、状態ベクトル$|\Psi(T)>$から

$$|\Psi(T)>= e^{-iS(T)}|\Phi(T)> \tag{3.4}$$

により新たな状態ベクトル$|\Phi(T)>$を定義する。ここで、時間tを

$$dt = dT/S(T) \tag{3.5}$$

と定義し、$S(T)$及び$|\Phi(T)>$のTに関する2階微分が無視できるとすると(WKB近似)、(3.2)式は近似的に

$$i\frac{d}{dt}|\Psi>= \hat{H}_Q(T)|\Psi> \tag{3.6}$$

となる。すなわち、シュレディンガー方程式が導かれたわけである。

この方法をさらに拡張することにより、形式的に、Wheeler-DeWitt方程式から巨視的な変数に対する古典的運動方程式と、量子力学的自由度に対するシュレディンガー方程式を同時に導くこともできる。まず、系の力学的自由度を巨視的な自由度Xと残りの量子力学的自由度に仮想的に分解し、全系の状態空間をXの状態空間$\mathcal{H}_X$と量子力学的自由度の状態空間$\mathcal{H}_Q$のテンソル積に分解する：

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_X \otimes \mathcal{H}_Q. \tag{3.7}$$

この分解により、$|X>$を$\hat{X}^\mu|X>= X^\mu|X>$を満たす$\mathcal{H}_X$の基底ベクトルとして、ベクトル$|\Psi>$は

$$|\Psi>= \int d\mu(X)\ |X> \otimes|\Psi(X)> \quad ;|\Psi(X)>\in \mathcal{H}_Q, \tag{3.8}$$

と形式的に表わされる。この時、$H|\Psi>= 0$という条件は$|\Psi(X)>$に対する方程式

$$[H_X(X, -i\partial_X) + \hat{H}_Q(X)]|\Psi(X)>= 0 \tag{3.9}$$

を与える。ここで、$\hat{H}_Q(X)$はXをパラメーターとして持つ量子力学的自由度に対するハミルトニアン、$H_X(X,P)$は一般に次のような構造を持つ巨視的自由度Xに対するハミルトニアンで

ある：

$$H_X(X,P)=\frac{1}{2}G^{\mu\nu}(X)P_\mu P_\nu+U(X). \tag{3.10}$$

ここで、$\mathcal{S}(X)$ を H_Xに対するハミルトン-ヤコビ方程式

$$H_X(X,\partial_X\mathcal{S})=0 \tag{3.11}$$

の解とすると、ハミルトン-ヤコビ理論により、常微分方程式

$$\begin{aligned} X^\mu &= G^{\mu\nu}P_\nu, \\ P_\mu &= \partial_\mu \mathcal{S}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

は H_X に対応する X の古典的な運動方程式の解の集合を与え、X-space はそれらの軌跡によって埋め尽くされる。この $\mathcal{S}$を用いて、

$$|\Psi(X)>=: e^{-i\mathcal{S}(X)}|\Phi(X)> \tag{3.13}$$

により量子力学的自由度に対する X-space 上で定義された状態ベクトル $|\Phi(X)>$を定義する。このとき、(3.9) 式において $\mathcal{S}(X)$ 及び $|\Phi(X)>$の Xに関する高階微分を無視すると（WKB近似)、$|\Phi(X)>$は X-space 上での上記の古典解に沿って、

$$i\frac{d}{dt}|\Phi(X)>\simeq \hat{H}_Q|\Phi(X)> \tag{3.14}$$

を満たす。

以上の方法は、形式的に Wheeler-DeWitt 方程式から時間発展の概念を抽出し、古典力学及び量子力学を再導出しているが、次のような本質的な問題に答えを与えていない：

○ 状態ベクトル $|\Phi>$の解釈。特に、通常の量子力学で観測者が系の外部にいることにより生じるいわゆる波束の収縮の問題が、状態ベクトルが宇宙全体を記述するときどうなるのか。

○ 時間を含めて、巨視的な（あるいは古典的な）自由度と量子力学的自由度の区別は何か。また、これと関連して、WKB近似はどの様な状況で正しいのか。

§4 宇宙の状態ベクトルの解釈

状態ベクトルが宇宙全体を記述している際のその解釈及び観測問題に対する解答を与えるために、まず通常の量子力学における状態ベクトルの解釈を復習しておく。

通常の量子力学では、対象系がヒルベルト空間のベクトル $|\Phi>$ で表わされるとき、その系の物理量 $\hat{x}$ を観測した結果 x という値が得られる確率は

$$P(x) =< \Phi|\mathcal{P}_x|\Phi> / < \Phi|\Phi> \tag{4.1}$$

で与えられ、各観測値に応じて対象系の状態は

$$|\Phi> \longrightarrow \mathcal{P}_x|\Phi> \tag{4.2}$$

と変化すると考える。ここで、$\mathcal{P}_x$ は $\hat{x}$ の固有値 x の固有空間への射影演算子である。もし、ここで状態ベクトルを個別の系に付随した実体と捉えると、観測操作は非可逆で non-unitary な変化、いわゆる波束の収縮を起こすこととなる。

この様な非力学的な変化を必要とする記述は、宇宙全体の状態を表わす理論では使えない。しかし、通常の量子力学の枠内でも、観測者（あるいは観測装置）と対象系を合わせた全系を量子力学の対象とし、観測操作を単に両系の間の特殊な相互作用として捉えることにより、non-unitary な変化を導入しない解釈が可能である。例えば、観測装置のある物理量 $\hat{X}$ に着目し、合成系の状態ベクトルが最初、$|\Psi>= |X_0> \otimes|\Phi>$ で与えられるとする。この状態が観測装置と対象系の相互作用のために、

$$|\Psi>= |X_0> \otimes|\Phi> \longrightarrow \int dx\ |X(x)> \otimes\mathcal{P}_x|\Phi> \tag{4.3}$$

と変化することにより観測装置の状態と対象系の状態の間に相関が生じるとすると、観測装置の情報から対象系の情報が一意的に読み取れる。ここで、$X(x)$ は x に応じて X の値が決まることを意味する。さらに、このとき、各 x に対して

$$P(x) = ||\mathcal{P}_x|\Phi> ||^2 / \int dx\ ||\mathcal{P}_x|\Phi> ||^2 \tag{4.4}$$

をその値が観測される確率として付与すれば、情報としては、最初の記述と同等となる。

ここで問題となるのは、現実の個々の観測では必ずXの値がどれかに確定し、異なった値は古典論理では共存できない点である。このため、このフォンノイマン流の観測理論において、状態ベクトルに実体論的な意味付けをしようとすると、観測されなかったXの値に相当する成分を捨て去り non-unitary な波束の収縮を導入するか、異なったXの値の数だけ異なった世界が生成されるとする Everret 流の多世界解釈を取るしかない。しかし、量子力学は確率的な予言しかできないことを考えると、状態ベクトルは単に観測に依って得られる結果の相関に関する情報を集約したものに過ぎないと見ることもできる。それが実現しない情報をも含むのは、我々が自然現象の間に確率的な相関しか見いだせないという事実に基づく。この立場にたつとき、観測操作とは、自然界の中から、(4.3) 式で与えられるような、相互作用により対象系の観測する物理量と相関を持つ第２の物理量を見いだすことであり、観測結果は、全系の状態ベクトルを第２の物理量に関して展開することである。この際、様々な観測結果が実現する相対確率は、分解されたベクトルのノルムで与えられる。そこで、ここで述べた解釈を decomposition interpretation と呼ぶことにする。

Decomposition interpretation は正確には、次のように定式化される。まず、各観測量Xには次のような性質を持つ状態空間の演算子$\mathcal{P}(X)$が対応する：

$$\begin{aligned} &\int d\mu(X)\mathcal{P}(X) = \mathbf{1}, \\ &\mathcal{P}(X)^2 = \mathcal{P}(X). \end{aligned} \tag{4.5}$$

系が状態$|\Phi>$にあるとき、観測量$X_1, \ldots, X_n$を観測した結果の確率分布は$|\Phi>$の分解

$$|\Phi> = \int d\mu(X_1)\cdots d\mu(X_n)\mathcal{P}(X_1)\cdots\mathcal{P}(X_n)|\Phi> \tag{4.6}$$

に対応して、

$$P(X_1, \cdots, X_n) = <\Phi|\mathcal{P}(X_1)\cdots\mathcal{P}(X_n)|\Phi> \tag{4.7}$$

で与えられる。

これは一見通常の量子力学と同じように見えるが、大きな違いがある。それは観測量$X_1, \ldots,$ X_nが可換なことである：

$$[\mathcal{P}(X_i), \mathcal{P}(X_j)] = 0. \tag{4.8}$$

したがって、このままでは可換な量を観測しただけであり、通常の量子力学的観測には対応しない。通常の観測は、Xの観測が同時に系の別の物理量$\hat{x}$の観測となっていなければならない。そのため

には、まず、Xが時間に関する情報を持っているとしなければならない。通常の観測情報は、1個の量に関する情報ではなく、必ず、観測した時間を含む多くの情報の組となっている。そこで、Xは

$$X = \{\hat{\chi}_1, \cdots, \hat{\chi}_{N_X}; \hat{t}_X\} \tag{4.9}$$

のように、時間の役割をする物理量$\hat{t}_X$といくつかの変数の組であるとする。この時間変数が観測時間を記録する変数となるためには、ある数t_Xが存在して、

$$\begin{aligned} t < t_X; &\quad |\Phi(t)> \in Null(\hat{t}_X), \\ t > t_X; &\quad \hat{t}_X|\Phi(t)> = t_X|\Phi(t)>, \end{aligned} \tag{4.10}$$

という性質を持っていなければならない。ここで、$Null(\hat{t}_X)$は$\hat{t}_X$の定義されていない（あるいは基準）状態である。このとき、Xの観測により、$\hat{x}$の時刻t_Xにおける値が観測されるための条件は、

$$\hat{x}\mathcal{P}(X)|\Phi(t_X+)> = x(X)\mathcal{P}(X)|\Phi(t_X+)> \tag{4.11}$$

となる。ここで、$x(X)$はxの値が、Xの値により一意的に決まることを意味する。この条件は、$\hat{x}$及び系の時間発展に対する条件であると同時に、$\mathcal{P}(X)$に対して一種の直交条件を要求する：

$$< \Phi|\mathcal{P}(X)\mathcal{P}(X')|\Phi > \simeq \delta(x' - x) < \Phi|\mathcal{P}(X)|\Phi > . \tag{4.12}$$

Decomposition interpretation の立場を取れば波束の収束の原因について思い悩む必要はなくなるが、依然として解決しなければならない大きな問題がある。それは直接観測される量Xと間接的に観測される量$\hat{x}$の区別、言い替えれば古典的物理量と量子力学的物理量の区別は何に依って生じるかという問題である。一つの大きな違いは、既に述べたXの可換性である。もう一つの違いは、過去の値の推論可能性である。実際、我々が観測できる情報は常にある時間での同時情報である。これはXに対してもおなじで、(4.7)式の与える確率分布は、ある時間t（もちろん、これも1次観測量である）でのXの分布である。ところが、我々がほしい情報は、$t = t_X$でのXの

分布である。一般に X の値は時間とともに変化するので、

$$< \Phi(t)|\mathcal{P}(X)|\Phi(t) > \longrightarrow < \Phi(t_X+)|\mathcal{P}(X)|\Phi(t_X+) > \tag{4.13}$$

という推論が可能でないといけない。これは、例えば、$\mathcal{P}(X)$ が

$$\mathcal{P}(X) = |X >< X| \tag{4.14}$$

の場合には、$\hat{U}_X(t)$ を $\hat{X}$ の時間発展の演算子として、

$$\hat{U}_X(t)|X > \simeq |X(t) > \tag{4.15}$$

という構造を持つことを意味する。すなわち、X の任意の時刻における値がある初期時刻での値で決まるという古典性を持つことを要求する。したがって、条件 (4.13) は一般に X に対する古典性条件

$$< \Phi(t)|\mathcal{P}(X(t - t_X))|\Phi(t) > = < \Phi(t_X+)|\mathcal{P}(X)|\Phi(t_X+) > \tag{4.16}$$

を要求する。ここで変数の古典性が、系の状態そのものにも依存することを注意しておく。

このように、decomposition interpretation のもとでは、古典的変数とは、時間情報を含む変数の組の可換な系列で条件 (4.5)、(4.12)、(4.16) を満たすものと定義される。したがって、この立場では、観測論の問題は、現実的な系でどの様な変数が古典変数となるか、またどの様な量子力学的な変数が条件 (4.11) を満たし、これらの古典変数の観測により 2 次的に観測可能になるかを調べることとなる。次節でこれらの条件を満たす変数と対応する演算子 $\mathcal{P}$ の例をコヒーレント表示を用いて構成する。

さて、decomposition interpretation に従うと、宇宙の状態ベクトルに対して自然な解釈が可能となる。まず、時間変数 T として上で述べた意味での古典性を持つものを取る。§6 で述べるようにこれはある程度可能である。この時間変数に対応する射影型の演算子を $\mathcal{P}(t)$ とすると、宇宙が状態ベクトル $|\Psi>$ で表わされるとき、古典変数 $X_1, \cdots, X_n$ を観測した結果の確率分布は、

$$P(X_1, \cdots, X_n; t) = < \Psi|\mathcal{P}(t)\mathcal{P}(X_1)\cdots\mathcal{P}(X_n)|\Psi > \tag{4.17}$$

で与えられる。これらの観測により、同時に系のどの様な情報が得られかは X の選択と状態ベクトル自体の構造により決まる。通常の量子力学のように、勝手な観測をデザインすることはできない。我々に許されるのは、情報の分析のみである。

前節のWKB近似の議論はこの様にして得られた観測情報が十分よい近似で通常の量子力学に従うことを保証している。実際、次節で述べるように、時間変数の古典性条件が満たされれば前節でのWKB近似はよい近似となり、状態ベクトル$|\Phi(t)>=\mathcal{P}(t)|\Psi>$は$t$に依存した適当な位相を分離することによりシュレディンガー方程式に従う。この際、この状態ベクトルのノルムが保存されないことは本質的ではない。Decomposition interpretationのもとでは相対確率のみが意味を持つので、ノルムの非保存は、その再規格化によりノルムの保存される状態ベクトルを新たに定義したとき、それの従う実行的なシュレディンガー方程式に現われる時間推進演算子が$\hat{H}_T$からずれることを意味するに過ぎない。このずれは、WKB近似がよくなるにつれ小さくなるので問題を起こさない。

もちろん、一般には、観測可能な物理量の系列による宇宙の状態ベクトルの分解により生じるベクトルには現実に我々が観測する宇宙の姿とは異なった状態が有為な確率で含まれている。しかし、物理量の間にこれらのベクトルに共通の相関があれが、それは宇宙の状態ベクトルからの有為な予言となる。さらに、いくつかの物理量の実際の観測値が与えられているとすれば、分解に依って生じたベクトルの一部が選ばれるために予言可能な情報の量は増大する。また、現在の観測から、その物理量が古典的に振舞う期間内では、宇宙の過去の情報を推論することが可能となる。

§5 古典性とコヒーレント状態

力学的な変数に対して、古典性条件を満足する状態の基底の最も自然な候補は、変数の値とその共役運動量の値を同時に指定するコヒーレント状態である。互いに共役な力学変数の組(x,p)に対するコヒーレント状態$|X,P>$は、$\frac{\hat{x}}{\sigma^2}+i\hat{p}$の固有状態

$$(\frac{\hat{x}}{\sigma^2}+i\hat{p})|X,P>=(\frac{X}{\sigma^2}+iP)|X,P> \tag{5.1}$$

として定義され、

$$\begin{aligned}&<x|X,P>=(\pi\sigma_x^2)^{-1/2}exp\big[iPx-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}\big];\\&\sigma^2=(1+i\sqrt{\sigma_x^2\sigma_p^2-1})/\sigma_p^2\end{aligned} \tag{5.2}$$

で与えられる。コヒーレント状態は異なる(X,P)に対して、近似的にしか直交せず、

$$<X',P'|X,P>=e^{[-\frac{1}{4}\sigma_x^2(P-P')^2-\frac{1}{4}\sigma_p^2(X-X')^2+\frac{1}{2}\{i(X+X')+\sqrt{\sigma_x^2\sigma_p^2-1}(X-X')\}(P-P')]}, \tag{5.3}$$

また互いに1次独立でもないが、完全な系となっている：

$$\int d\mu(X,P)|X,P><X,P| = \mathbf{1}. \tag{5.4}$$

通常の量子力学におけるコヒーレント状態の時間発展を調べるには、ウィグナー関数を用いるのが便利である。一般に、状態ベクトル $|\Phi>$ のウィグナー関数 $W(X,P)$ は次のように定義される：

$$W(X,P) := \frac{1}{2\pi}\int d\xi\, e^{-iP\cdot\xi}\bar{\Phi}(X-\frac{\xi}{2})\Phi(X+\frac{\xi}{2}). \tag{5.5}$$

完全性条件 (5.4) より、状態ベクトルを

$$|\Phi> = \int d\mu(X,P)|X,P>\Phi(X,P); \qquad \Phi(X,P) := <X,P|\Phi> \tag{5.6}$$

と展開するとき、$F(X,P) := |\Phi(X,P)|^2$ はウィグナー関数を用いて、

$$F(X,P) = 4\pi\sigma_x\sigma_p \int dx\int dp\, e^{-(\sigma_p^2x^2+\sigma_x^2p^2+2\sqrt{\sigma_x^2\sigma_p^2-1}xp)}W(X+x,P+p) \tag{5.7}$$

と表わされる。$F(X,P)$ は

$$\int d\mu(X,P)F(X,P) = 1 \tag{5.8}$$

ので X,P の同時分布関数、あるいは相関関数とみなすことができる。

ある時刻 t_0 で $|\Phi(t_0)> = |X_0,P_0>$ と取ると、時刻 t における $F(X,P)$ の値は $|<X,P|e^{-iH(t-t_0)}|X_0,P_0>|^2$ と一致するので、コヒーレント状態の古典性を判定するのに用いることができる。(5.7) 式より、$F(X,P)$ はウィグナー関数を X 及び P に関して分散 σ_x、σ_p の程度の広がりにわたって平均したものなので、$F(X,P)$ の振舞いはウィグナー関数の振舞いと本質的に同じになる。ただし、ウィグナー関数は一般に正定値でなく激しく振動する。この様な振動領域では、対応する $F(X,P)$ の値は実質的にゼロとなる。

ハミルトニアンが $H=\frac{1}{2m}p^2+V(x)$ で与えられるとき、シュレディンガー方程式より、ウィグナー関数 $W(x,p)$ は次のような時間発展方程式に従う：

$$\partial_t W+\frac{p}{m}\partial_x W+(-V')\partial_p W=\frac{1}{24}V'''\partial_p^3 W+\cdots. \tag{5.9}$$

ここで、右辺の$\cdots$は W の p に関する5次以上の高階微分の項である。この式で右辺が無視できる場合には、方程式は古典的な分布関数に対するリウヴィル方程式と一致し、Wの値は位相空間 (x,p) における古典解の軌道に沿って保存される。ウィグナー関数がある点に強いピークを持つ場合、右辺が無視できる条件は、Δx をポテンシャルの変化のスケール、Δpをピークの p 方向の広がりとして

$$\Delta x\Delta p >> 1 \tag{5.10}$$

となる。例えば初期時刻における $|\Phi>$を $|X_0,P_0>$と取った場合、対応するウィグナー関数 $W(x,p)$ は (X_0,P_0) に$\Delta p\ \simeq\ \sigma_p$のピークを持つ。したがって、$\sigma_p\Delta x\ >>\ 1$ となるようにσ_pを取れば、コヒーレント状態の時間発展は（少なくともある有限時間の間は）古典性条件を満たす。

以上の議論は変数 Xを量子系の状態を観測するための古典変数として扱う場合には少し変更が必要となる。この様な状況では全系の状態ベクトル $|\Phi>$は次のように展開される：

$$|\Phi>=\int dXdP\,|X\,P>\otimes|\Phi(X,P)> \qquad ;|\Phi(X,P)>\in\mathcal{H}_Q. \tag{5.11}$$

このとき、(X,P) のコヒーレント状態の広がり程度の変化に対して、$|\Phi(X,P)>$が激しく変化するときには、明らかに変数 Xと残りの量子系の間には相関はなく、Xはたとえそれ自体の時間発展が古典性条件を満たしていても意味のある観測量とはなりえない。さらに、コヒーレント状態の時間発展は一般に $|\Phi>$そのものに依存する。本来、古典性条件は (X,P) の相関関数

$$F(X,P):=<\Phi(X,P)|\Phi(X,P)> \tag{5.12}$$

の時間発展が (X,P) の古典的な時間発展に還元されるための条件である。したがって、$|X,P>$のウィグナー関数よりも状態ベクトル $|\Phi>$自体のウィグナー関数が古典的に振舞うことの方が (X,P) の古典性を表わす条件としてはより適切であることになる。

§6 宇宙のウィグナー関数

以上の考え方を、量子宇宙論における物理量の古典性の問題に適用してみよう。まず問題となるのは時間である。前節のアプローチに従うと、時間を古典的な観測量としてとらえるためには時間的な変数 T とその共役量 E のコヒーレント状態で宇宙の状態ベクトル $|\Psi>$ を展開することになる：

$$|\Psi>=\int d\mu(T,E)|T,E>\otimes|\Psi(T,E)> . \tag{6.1}$$

このとき、(T,E) に関する $|\Psi>$ のウィグナー関数が古典的に振舞えば、(T,E) は古典的な時間変数とみなすことができる。もちろん、我々が日常使う時間はなんらかの力学系に付随した物理量である。Decomposition interpretation の立場では、$|\Psi(T,E)>$ をこれらの物理量のコヒーレント状態 $|t,e>$ で展開して得られる細分化された状態ベクトルのノルムが (T,E) と (t,e) の間の1対1対応を与えるような相関を示さなければ、時間概念は意味を失ってしまう。さらに、Decomposition interpretation の立場では各々の観測ごとに（その観測結果の情報を蓄える）別々の古典変数が必要となるので、何回もの観測の時間を比較するためには、(T,E) と1対1の相関を持つ時間的古典量が無限に存在しなければならない。そのようなものがあって初めて、時間の普遍性が保証される。宇宙の状態ベクトルがどのようなものであればこの様な条件が満たされるかは重要な問題であるが、現段階ではとうてい解決不可能な問題のように思われるので、以下ではこの様な相関が実現されていると暗黙の内に仮定して、(T,E) が我々の日常的な時間と一致するとして議論を進める。

もちろん時間は1次元なので、T と E の間に1次元的な相関がなければならない。実は、Wheeler-DeWitt 方程式がこの相関の存在を保証する。それを見るために、古典的な物質のみを含む一様等方宇宙の量子論を考える。e^{α} を宇宙のスケール因子、$p=-\frac{\dot{\alpha}}{N}e^{3\alpha}$（$N$ は lapse 関数）をその共役運動量としてハミルトニアンは

$$H=-\frac{1}{2}e^{-3\alpha}p^2+h^2e^{(2n-3)\alpha} \tag{6.2}$$

で与えられ、古典解は単に

$$p=\pm\epsilon;\epsilon=\sqrt{2}he^{n\alpha}. \tag{6.3}$$

となる。対応する Wheeler-DeWitt 方程式は

$$[\frac{1}{2}e^{-3\alpha}\frac{d^2}{d\alpha^2}+h^2e^{(2n-3)\alpha}]\Psi(\alpha)=0 \tag{6.4}$$

となる。

この方程式の解は

$$\Psi(\alpha) = C_1 J_0\big(\frac{\sqrt{2}h}{n}e^{n\alpha}\big) + C_2 N_0\big(\frac{\sqrt{2}h}{n}e^{n\alpha}\big), \tag{6.5}$$

で与えられるので、これを用いて、(a, p) に関するウィグナー関数を評価できる。$\epsilon >> 1$ に対して結果は次のようになる：

$p < \epsilon; (p = \epsilon \cos\phi)$

$$W(\alpha, p) \simeq A \exp\big[\frac{2\epsilon}{n}(\phi\cos\phi - \sin\phi)\big] - B\cos\big[-\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n}\{(\epsilon^2 + p^2)^{1/2} - p\ln\frac{p + (p^2+\epsilon^2)^{1/2}}{\epsilon}\}\big], \tag{6.6a}$$

$\epsilon < p < \epsilon^2; (p = \epsilon\cosh\chi)$

$$W(\alpha, p) \simeq \frac{2}{3^{1/2}} A \cos\big[\delta + \frac{2\epsilon}{n}(\sinh\chi - \chi\cosh\chi)\big] - B\cos\big[-\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n}\{(\epsilon^2 + p^2)^{1/2} - p\ln\frac{p + (p^2+\epsilon^2)^{1/2}}{\epsilon}\}\big], \tag{6.6b}$$

$\epsilon^2 < p;$

$$W(\alpha, p) = \mathrm{O}(\frac{1}{p}\ln\frac{p}{\epsilon^2}). \tag{6.6c}$$

ここで

$$A = \begin{cases} \frac{(\pi n)^{1/2}}{\pi^2 \epsilon |\epsilon^2 - p^2|^{1/4}} & \text{for } |p-\epsilon| \gg \epsilon^{1/3}, \\ \frac{n^{1/3}\Gamma(1/3)}{3^{1/6}}\frac{1}{\epsilon^{4/3}} & \text{for } |p-\epsilon| \lesssim \epsilon^{1/3}, \end{cases}$$

$$B = \frac{2(\pi n)^{1/2}}{\pi^2\epsilon(\epsilon^2+p^2)^{1/4}},$$

$$\delta = \begin{cases} \pi/4 & \text{for } \epsilon + \mathrm{O}(\epsilon^{1/3}) \ll p, \\ \pi/6 & \text{for } \epsilon < p \lesssim \epsilon + \mathrm{O}(\epsilon^{1/3}). \end{cases}$$

以上の結果はウィグナー関数が、αが十分大きいとき、位相空間で古典解 (6.3) に沿って鋭いピークを持ち、αと p の間に強い 1 次元的な相関が生じていることを示している。従って、宇宙が

十分膨張した後では、αは古典的な時間の役割を果たすことになる。このとき、ウィグナー関数の p 方向の広がりは$\epsilon^{1/3}$に比例してどんどん大きくなるが、宇宙の膨張率 $p/\sqrt(2)e^{n\alpha}$の古典解からの分散$\epsilon^{-2/3}$に比例してはどんどん小さくなるので、宇宙が十分膨張した後（例えば現在）では、宇宙のサイズと膨張率は十分よい精度で同時観測可能となる。

この結果は、ウィグナー関数に対する方程式

$$p\frac{\partial W}{\partial\alpha}+n\epsilon^2\frac{\partial W}{\partial p}=\frac{n^3}{6}\epsilon^2\frac{\partial^3 W}{\partial p^3}+\cdots \tag{6.7}$$

から導くこともできる。特に、ピークの位置及びその近傍の構造は･･･の部分を無視した方程式により十分再現される。

これらの議論を、時間以外の古典変数が存在する場合に一般化する事は容易である。§5 で行なった議論を、古典変数に時間を含めて行なえばよい。すなわち、宇宙の状態ベクトル$|\Psi>$を時間を含む古典的変数のコヒーレント状態で

$$|\Psi>=\int d\mu(X,P)\,|X,P>\otimes|\Psi(X,P)>;\quad |\Psi(X,P)>\in\mathcal{H}_Q \tag{6.8}$$

と分解すると、観測の相関関数 $F(X,P)\ :=<\Psi(X,P)|\Psi(X,P)>$は X,Pに関するウィグナー関数

$$W(X,P):=\frac{1}{(2\pi)^n}\int d\xi e^{-iP\cdot\xi}<\Psi(X-\xi/2)|\Psi(X+\xi/2)> \tag{6.9}$$

を用いて (5.7) 式と同様に表わされる。ここで、$|\Psi(X)>$は$|\Psi>$の$\hat{X}|X>=X|X>$に関する分解

$$|\Psi>=\int d\mu(X)|X>\otimes|\Psi(X)>;\quad |\Psi(X)>\in\mathcal{H}_Q \tag{6.10}$$

である。

ここで面白いことは、いくつかの特殊な場合には宇宙のウィグナー関数が通常の量子力学と同様にリウヴィル型の方程式に従うことである。例えば、一様なスカラ場ϕと宇宙のスケール因子 e^α

を古典変数に取った場合、Wheeler-DeWitt 方程式は

$$[\frac{1}{2}e^{-3\alpha}(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\Phi^2})+e^{3\alpha}V(\Phi)-\frac{1}{2}Ke^{\alpha}+H_Q]|\Psi(\alpha,\Phi)>=0 \tag{6.11}$$

となる。ここで、位相空間上の量子力学的自由度に対する統計演算子を

$$\rho(X,P):=\int d\xi\, e^{-iP\cdot\xi}|\Psi(X+\xi/2)><\Psi(X-\xi/2)| \tag{6.12}$$

で定義すると、ウィグナー関数は

$$W(X,P)=\mathrm{Tr}\,\rho(X,P) \tag{6.13}$$

となる。そこで、統計演算子を

$$\rho'(X,P)=\rho(X,P)/W(X,P) \tag{6.14}$$

と規格化すると、Wheeler-DeWitt 方程式は、次のような２組の方程式郡を与える：
First Equation

$$\begin{aligned}&\partial_\mu(P^\mu e^{3\alpha}W)+\partial_{P_\mu}(F_\mu e^{3\alpha}W)\\&\qquad=\partial_{P_\mu}\partial_{P_\nu}\partial_{P_\lambda}(<D_{\mu\nu\lambda}>e^{3\alpha}W)+\cdots,\end{aligned} \tag{6.15a}$$

$$\begin{aligned}&P^\mu\partial_\mu\rho'+F_\mu\partial_{P_\mu}\rho'=i[H_Q,\rho']\\&\qquad+\frac{1}{2W}\partial_{P_\mu}[W\{G_\mu-<G_\mu>,\rho'\}]+\cdots,\end{aligned} \tag{6.15b}$$

Second Equation

$$\begin{aligned}&[-P^\mu P_\mu+2\mathcal{V}(X)+2<H_Q>]W\\&\qquad=-\frac{1}{4}\mathcal{G}^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu W+\partial_{P_\mu}\partial_{P_\nu}(<D_{\mu\nu}>W)+\cdots,\end{aligned} \tag{6.16a}$$

$$\{H_Q-<H_Q>,\rho'\}=-\frac{1}{2}\partial^\mu(\ln W)\partial_\mu\rho'$$

$$+\frac{1}{2W}\partial_{P_\mu}\partial_{P_\nu}\{W(D_{\mu\nu}-<D_{\mu\nu}>),\rho'\}$$
$$+\frac{1}{W}\partial_{P_\mu}(W<D_{\mu\nu}>)\partial_{P_\nu}\rho'-\frac{1}{W}[G_\mu,\partial_{P_\mu}(W\rho')]+\cdots, \qquad (6.16b)$$

ここで $\mu=\alpha,\Phi$、$<\mathcal{O}>=\mathrm{Tr}\,\rho'\mathcal{O}$である。また、$F_\mu$、$G_\mu$、$D_{\mu\nu}$、$D_{\mu\nu\lambda}$ は次式で与えられる：

$$F_\mu:\quad \begin{cases} F_\alpha=<G_\alpha>, \\ F_\Phi=<G_\Phi>, \end{cases} \qquad (6.17a)$$

$$G_\mu:\quad \begin{cases} G_\alpha=2(-Ke^\alpha+3e^{3\alpha}V)+e^{-3\alpha}\partial_\alpha(e^{3\alpha}H_Q), \\ G_\Phi=e^{3\alpha}V'+\partial_\Phi H_Q, \end{cases} \qquad (6.17b)$$

$$D_{\mu\nu}:\quad \begin{cases} D_{\alpha\alpha}=\frac{1}{4}e^{-3\alpha}\partial_\alpha(e^{3\alpha}G_\alpha), \\ D_{\alpha\Phi}=\frac{1}{4}\partial_\Phi G_\alpha, \\ D_{\Phi\Phi}=\frac{1}{4}\partial_\Phi G_\Phi, \end{cases} \qquad (6.17c)$$

$$D_{\mu\nu\lambda}:\quad \begin{cases} D_{\alpha\alpha\alpha}=\frac{1}{6}e^{-3\alpha}\partial_\alpha(e^{3\alpha}D_{\alpha\alpha}), \\ D_{\alpha\alpha\Phi}=\frac{1}{6}\partial_\Phi D_{\alpha\alpha}, \\ D_{\alpha\Phi\Phi}=\frac{1}{6}\partial_\Phi D_{\alpha\Phi}, \\ D_{\Phi\Phi\Phi}=\frac{1}{6}\partial_\Phi D_{\Phi\Phi}. \end{cases} \qquad (6.17d)$$

これらの方程式の内最初のものは、右辺の運動量に関する高階微分が無視できるとき、変数 (X,P) に対するウィグナー関数が位相空間における古典軌道

$$\begin{aligned} \dot{X}^\mu &= -P^\mu, \\ \dot{P}_\mu &= -F_\mu, \end{aligned} \qquad (6.18)$$

にそって保存されること、従って、前節で述べた古典性条件を満たしていることを表わしている。さらに、第2の方程式は、同じ仮定のもとで、統計演算子ρ'が位相空間上の古典軌道にそってシュレディンガー方程式

$$i\dot{\rho}'=[H_Q,\rho'] \qquad (6.19)$$

を満たすことを示している。最後に、重力の量子論に特有の方程式である第2群の方程式は、同じ

近似のもとで準古典的な hamiltonian constraint を与える：

$$-P^{\mu}P_{\mu} + 2\mathcal{U}(X) + 2 < H_Q >= 0. \tag{6.20}$$

このように、decomposition interpretation のもとでは、コヒーレント表示とウィグナー関数を武器として、宇宙の状態ベクトルから意味のある情報を取り出すことが可能である。このアプローチに従ってさらに現実的な系を研究することは今後の課題である。